

OPSJONSPRISING OG FRAKSJONELLE DIFFUSJONSLIKNINGER

Veileder: Espen R. Jakobsen, Institutt for matematiske fag (erj@math.ntnu.no).

Bakgrunn: En Europeisk put-opisjon gir en rett (men ikke plikt) til å selge en aksje på et tidspunkt t i framtiden til en gitt kurs K . Hvis dagens verdi/kurs av aksjen er x , sier den klassiske teorien til Black and Scholes at prisen på opsjonen $v(x, t)$ er løsningen til følgende initialverdiproblem:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}\sigma^2 u_{xx} + ru_x - ru & \text{for } x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = \max(K - x, 0) & \text{for } x > 0, \end{cases}$$

der σ er den såkalte volatiliteten og r er bankrenten.

Utgangspunktet for denne modellen er at (logaritmen til) aksjeprisene er Gaussiske prosesser. Grovt sett betyr det at sannsynlighetstettheten til aksjeprisen er på formen $e^{-x^2/t}$. På grunn av eksponensiell demping mot uendelig, medfører denne modellen at store endringer i aksjepriser (dvs. store utslag fra 0) er meget usannsynlige over et kort tidsintervall. I virkeligheten forekommer slike store endringer ("crack") MYE oftere enn modellen tilsier. En populær måte å løse dette problemet på er å modellere (logaritmen til) aksjeprisen med en Levyprosess (en hoppeprosess). Men en slik modell blir opsjonsprisen løsningen av et initialverdiproblem for en fraksjonell diffusjonslikning:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}\sigma^2 u_{xx} + ru_x - ru \\ \quad + \int_{|z|>0} u(xe^z, t) - u(x, t) - x(e^z - 1)u_x(t, x) \nu(z) dz & \text{for } x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = \max(K - x, 0) & \text{for } x > 0, \end{cases}$$

der $\nu(z)dz$ kalles for Levymålet til modellen. Dette målet er singulært i de mest populære modellene og derfor oppfører integralledet seg som en fraksjonell derivert, ikke ulik den fraksjonelle Laplace-operatoren $\Delta^\alpha u$. Liknende modeller finnes også for andre typer opsjoner som handles på verdens børser, f.eks. amerikanske, asiatiske, digital og barrier opsjoner.

Problemstillinger:

1. (Teori) Studere fraksjonelle diffusjonslikninger som opptrer som i matematisk finans ved hjelp av: (i) teorien for svake løsninger slik den innføres i kurset *TMA4305 Partielle differensiallikninger* og metodene i kap 7.1 i Evans bok *Partial Differential Equations*, og/eller (ii) den teorien for viskositetsløsninger, en anderledes og mye nyere teori (sjekk en.wikipedia.org/wiki/Viscosity_solution).

2. (Numerikk/teori) Studere spektralmetoder for fraksjonelle diffusjonslikninger som opptrer som i matematisk finans. Dette er en spesielt effektiv metode for slike likninger som ikke har vært mye studert i finans-sammenheng.
3. (Numerikk/teori) Studere og sammenlikne ulike numeriske metoder for fraksjonelle diffusjonslikninger som opptrer som i matematisk finans. Vanlige metoder er endelig differansemetoder, endelig elementmetoder, FFT-baserte metoder, spektralmetoder og Monte-Carlo metoder. Dette er et aktivt forskningsområde.

Bakgrunnsliteratur:

1. Matematisk teori for opsjonsprising i finans:
 - Del 1 av Wilmott, Howison og Dewynne: *The Mathematics of Financial Derivatives*.
2. “Fraksjonelle” opsjonsprisingslikninger:
 - Kap. 12 i Cont og Tankov: *Financial Modelling with Jump Processes*,
 - Schoutens: *Levy Processes in Finance*.
3. Svake løsninger av stasjonære diffusjonslikninger:
 - Kap 6.2 i McOwen: *Partial Differential Equations* og
 - kap. 6.1 og 6.2 i Evans: *Partial Differential Equations*.
4. Svake løsninger av diffusjonslikninger:
 - Kap 7.1 i Evans: *Partial Differential Equations*.
5. Viskositetsløsninger:
 - Kap 10 i Evans: *Partial Differential Equations*.
 - Koike: *A beginner's guide to the theory of viscosity solutions*. www.math.tohoku.ac.jp/~koike/evis2012version.pdf
6. Spektralmetoder:
 - Kap 1.2, 2.1, 3.1 og 3.2 i Canuto, Hussaini, Quarteroni og Zang: *Spectral Methods in Fluid Dynamics*.
7. Numerisk løsning av opsjonsprisingslikninger:
 - Achdou og Pironneau: *Computational Methods for Option Pricing*.
 - Kap 8 i Wilmott, Howison og Dewynne: *The Mathematics of Financial Derivatives*.
 - Artikkelen til d'Halluin, Forsyth og Vetzal: *Robust numerical methods for contingent claims under jump diffusion processes*. IMA Journal of Numerical Analysis. 25 (2005), no. 1, 87–112.
8. Numerikk og viskositetsløsninger:
 - E. R. Jakobsen: *Monotone schemes (viscosity solutions)* In *Encyclopedia of Quantitative Finance*, p. 1253-1263.